Titulaire : Guillaume Dujardin
Assistants : Hussein Cheikh-Ali et William Hautekiet

Exercices de Calcul Différentiel et Intégral 2 - 2019/2020

Séance 7 - La transformation de Fourier

Exercice 1. Considérons les fonctions

$$\chi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} n/2 & \text{si } x \in [-1/n, 1/n], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Est-ce que $\chi_n \in \mathcal{S}$? Est-ce que $\chi_n \in L^1$? Démontrer que $\mathcal{F}(\chi_n)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}(\xi/n)$ où $\operatorname{sinc}(\xi) = \frac{\sin(\xi)}{\xi}$.
2. Remarquer que $\mathcal{F}(\chi_n) \notin L^1$. Sachant que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \pi,$$

démontrer que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}(\xi/n) \cos(\xi x)\, d\xi = \begin{cases} n/2 & \text{si } x \in]-1/n, 1/n[, \\ n/4 & \text{si } x = \pm 1/n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(En particulier, cette intégrale converge.) Par contre, démontrer que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}(\xi/n) \sin(\xi x)\, d\xi$$

ne converge pas pour $x = \pm 1/n$.
3. Soit $f \in \mathcal{S}$. Démontrer que

$$\chi_n * f \to f$$

uniformément sur $\mathbb{R}$ pour $n \to \infty$.

Solution 1. 2. Remarquer que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(ax)}{x}\, dx = \begin{cases} \pi & \text{si } a > 0, \\ 0 & \text{si } a = 0, \\ -\pi & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

En utilisant que
$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y)),$$
on obtient
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}(\xi/n)\cos(\xi x)\ d\xi = \frac{n}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin((1/n+x)\xi)+\sin((1/n-x)\xi)}{\xi}\ d\xi$$
et cette intégrale vaut
$$\begin{cases} \frac{n}{4\pi}(\pi+\pi) = n/2 & \text{si } 1/n+x>0 \text{ et } 1/n-x>0,\\ \frac{n}{4\pi}(\pi+0) = n/4 & \text{si } x=\pm 1/n,\\ \frac{n}{4\pi}(\pi-\pi) = 0 & \text{si } 1/n+x<0 \text{ ou } 1/n-x<0. \end{cases}$$
Afin de montrer que l'intégrale
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(\xi/n)}{\xi/n}\ d\xi = n\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(\xi)}{\xi}\ d\xi$$
ne converge pas, on va montrer que la valeur dépend de la suite exhaustive de $\mathbb{R}$ choisie. Considérons d'abord $([-m,m])_{m\in\mathbb{N}}$. La fonction $\frac{\sin^2(\xi)}{\xi}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et impaire, donc
$$\int_{-m}^{m} \frac{\sin^2(\xi)}{\xi}\ d\xi = 0$$
pour chaque m.
Considérons maintenant $([-m\pi, Nm\pi])_{m\in\mathbb{N}}$ pour un nombre naturel $N>1$. Vu que $\sin^2(\pi/2+k\pi)=1$ pour chaque $k\in\mathbb{Z}$ et que $\sin^2(\xi)$ est continue et π-périodique sur $\mathbb{R}$, il existe un $a\in\,]0,\pi/2[$ tel que $\sin^2(\xi)\geq 1/2$ pour tout $\xi\in[\pi/2+k\pi-a, \pi/2+k\pi+a]$. Maintenant,
$$\begin{aligned}
\int_{-m\pi}^{Nm\pi} \frac{\sin^2(\xi)}{\xi}\ d\xi &= \int_{m\pi}^{Nm\pi} \frac{\sin^2(\xi)}{\xi}\ d\xi \\
&\geq \sum_{k=m}^{Nm-1} \int_{\pi/2+k\pi-a}^{\pi/2+k\pi+a} \frac{\sin^2(\xi)}{\xi}\ d\xi \\
&\geq \sum_{k=m}^{Nm-1} \frac{a}{\pi/2+k\pi+a} \\
&\geq \sum_{k=m}^{Nm-1} \frac{a}{\pi(k+1)} \\
&= \frac{a}{\pi}\sum_{k=m+1}^{Nm} \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$
En utilisant que
$$\ln(m+1) \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \leq \ln(m)+1$$

on a démontré que

$$\begin{aligned}
\frac{n}{2\pi}\int_{-m\pi}^{Nm\pi}\frac{\sin^2(\xi)}{\xi}\,d\xi &\geq \frac{na}{\pi^2}(\ln(Nm+1)-\ln(m+1)-1)\\
&= \frac{na}{\pi^2}\left(\ln\left(\frac{Nm+1}{m+1}\right)-1\right)\\
&\longrightarrow \frac{na}{\pi^2}(\ln(N)-1) \quad \text{si } m\to\infty
\end{aligned}$$

ce qui est supérieur à 0 pour N assez grand.